1 Relacije ekvivalencije

1. Neka je $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,3),(4,4),(4,5)\}$ relacija skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$.
   a) Odrediti ρ^{-1}.
   b) Dopuniti relaciju ρ do relacije ekvivalencije $\overline{\rho}$, a potom odrediti klase ekvivalencije elemenata skupa A.
   c) Ako je data relacija $\sigma = \{(2,3),(2,5),(4,1)\}$, odrediti $\rho \circ \sigma$.

2. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Ispitati da li je relacija $\equiv_m$, definisana na sledeći način:
$$(\forall x, y \in \mathbb{Z})(x \equiv_m y \Leftrightarrow m \mid x - y),$$
relacija ekvivalencije u skupu $\mathbb{Z}$. Odrediti klasu ekvivalencije elementa $x \in \mathbb{Z}$.

3. Dokazati da je relacija $\sim$, definisana na sledeći način:
$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc,$$
relacija ekvivalencije u skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4. Ako su ρ_1 i ρ_2 relacije ekvivalencije na skupu A, dokazati da je tada i $\rho_1 \cap \rho_2$ relacija ekvivalencije na skupu A.

5. Ispitati da li je relacija ρ definisana na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relacija ekvivalencije
$$x \rho y \Leftrightarrow x^2 y + 2y = y^2 x + 2x.$$

6. Ispitati da li je relacija ρ definisana na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$ relacija ekvivalencije
$$a \rho b \Leftrightarrow a^2 + 7b = b^2 + 7a.$$
Odrediti sve klase ekvivalencije.

2 Relacije poretka

1. Dopuniti relaciju ρ iz zadatka 1. do relacije poretka.

2. Dokazati da je relacija $\subseteq$ relacija poretka na skupu $\mathcal{P}(A)$. Da li je linearno uredjenje na $\mathcal{P}(A)$?

3. Dokazati da je relacije $\mid$ relacija poretka na skupu $\mathbb{N}$. Da li je linearno uredjenje na $\mathbb{N}$?

4. Da li je relacija
$$(a,b) \preceq (c,d) \Leftrightarrow a \le c \wedge b \le d$$
relacija poretka na $\mathbb{R}^2$? Da li je linearno uredjenje na $\mathbb{R}^2$?

5. Odrediti minimalne i maksimalne elemente, majorante i minorante, supremume i infimume sledećih skupova:
   a) $A = (-\infty, -1]$, $B = [-7, 5)$, $C = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ u skupu $\mathbb{R}$;
   b) $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ u skupu $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$;
   c) $I = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \le x < 1\}$ u skupu $\mathbb{Q}$.